Тема 1. Линейное программирование.

Лекция 1. Общая задача линейного программирования. Графический метод решения задач.

§1. Основы линейного программирования.

Определение 1. ***Линейное программирование*** – наука о методах исследования и отыскания наибольшего и наименьшего значений *линейной функции*, на неизвестные которой наложены *линейные ограничения*.

Линейное программирование применяется, если нельзя использовать классические методы исследования функции на экстремум.

Особо широкое распространение линейное программирование получило в экономике, так как во многих экономических задачах зависимости между величинами приводят к линейным функциям с линейными ограничениями на неизвестные.

Примеры задач линейного программирования

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).
2. Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях).
3. Задача об использовании мощностей (или задача о загрузке оборудования).
4. Задача о раскрое материала.
5. Транспортная задача.

Рассмотрим пример составления экономико-математической модели.

Задача.

Хозяйству надо не более 10-ти 3-х тонных и не более 8-ми 5-ти тонных машин. Отпускная ценна машины одной марки 2000 у. д. е., а другой – 4000 у. д. е. Хозяйство может выделить на приобретение машин 40000 у. д. е. Сколько следует приобрести машин каждой марки, чтобы их общая суммарная грузоподъемность была максимальной?

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \text{-кол-во машин 1-го вида} \\
x_2 \text{-кол-во машин 2-го вида} \\
\text{целевая функция} \\
z=3x_1+5x_2 \to \max \\
\text{при ограничениях} \\
\begin{cases} x_1 \le 10 \\ x_2 \le 8 \\ 2000x_1+4000x_2 \le 40000 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}
\end{array}\right\} \text{математическая модель задачи}$$

§2. Общая задача линейного программирования.

Пусть задана система **m** линейных уравнений и неравенств с **n** переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ a_{k+1;1}x_1 + a_{k+1;2}x_2 + \ldots + a_{k+1;n}x_n \le b_{k+1} \\ a_{k+2;1}x_1 + a_{k+2;2}x_2 + \ldots + a_{k+2;n}x_n \le b_{k+2} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_{1,2\ldots n} \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

и линейная функция $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$, при котором линейная функция **z** принимает оптимальное (*max* или *min*) значение.

Определение 1. Систему (1) называют ***системой ограничений,*** а функцию *z*- линейной или ***целевой функцией,*** или функцией цели.

Определение 2. ***Оптимальным решением*** или оптимальным планом задачи линейного программирования называется такое решение $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ системы ограничений, при котором линейная функция *z* принимает оптимальное значение.

Определение 3. Если система ограничений состоит из одних неравенств, то считается, что задача линейного программирования задана в ***стандартном*** виде; если же из одних уравнений, то задача линейного программирования задана в ***каноническом*** виде; если же есть уравнения и неравенства, то задача называется ***общей.***

Чтобы перейти от стандартного задания к каноническому виду, вводят дополнительные неотрицательные переменные:

со знаком «+», если $\le b$,

со знаком «-», если $\ge b$.

Пример: Пусть задана общая система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ x_1+x_2=0 \\ 2x_1-3x_2\le 2 \\ 5x_1+x_2\ge 3 \\ x_1-x_2\le 2 \\ x_{1,2}\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \le & + \\ \ge & - \\ \le & + \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ x_1+x_2=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 5x_1+x_2-x_4=3 \\ x_1-x_2+x_5=2 \\ x_{1,2,3,4,5}\ge 0 \end{cases}$$

общая задача — каноническая задача

§3. Системы «m» линейных уравнений с «n» переменными.

В задачах линейного программирования представлены задачи, в которых ранг матрицы A меньше числа переменных, т.е. $r(A)<n$. Или иначе: максимальное число независимых уравнений системы $(r(A))$ меньше числа переменных.

Пусть дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A_{m\times n}$$

Будем предполагать, что в данной системе все «m» уравнений независимы, т.е. $r(A)=m$, $m<n$.

Определение 1. Любые «m» переменных этой системы называют основными или ***базисными***, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные $(n-m)$ переменных называются ***свободными*** или неосновными.

Теорема. Если для системы «m» линейных уравнений с «n» переменными $(m<n)$ ранг матрицы коэффициентов при переменных равен «m», т.е. существует хотя бы одна группа базисных переменных, то эта система является ***неопределенной*** (т.е. имеет множество решений), причем каждому произвольному набору значений свободных переменных соответствует одно решение системы.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} m=2\,;\, n=4 \quad \Rightarrow \quad r(A)\le 2 \\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\ne 0 \quad \Rightarrow \quad r(A)=2 \end{matrix}$$

Значит, базисных переменных 2.

x_1 и x_2 - будем считать базисными.

$x_3\,;\,x_4$ - свободными.

$$+\begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 \end{cases} \quad x_2 = 2x_3 + x_4 - \frac{8}{3}x_3$$

$$3x_1 = 4x_3$$

$$x_1 = \frac{4}{3}x_3 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + x_4$$

$$X = \left(\underbrace{\frac{4}{3}x_3; -\frac{2}{3}x_3 + x_4;}_{\text{базисные}}\ \underbrace{x_3; x_4}_{\text{свободные}} \right)$$

Пусть: 1) $x_3 = 1 \quad x_4 = 0$, тогда $x_1 = \frac{4}{3}; x_2 = -\frac{2}{3}$

$\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; 1; 0\right)$ - недопустимое.

2) $x_3 = 0 \quad x_4 = 1$, тогда $x_1 = 0; x_2 = 1$

$(0; 1; 0; 1)$ - опорное.

Определение 2. Решение $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$ системы линейных уравнений называется ***опорным*** (или допустимым), если оно содержит лишь неотрицательные компоненты. В противном случае решение называется *недопустимым.*

В задачах линейного программирования именно такие решения представляют интерес.

Определение 3. Решение системы «*m*» уравнений с «*n*» переменными называется ***базисным***, если все $(n - m)$ свободных переменных равны нулю.

В случае, если $m \neq n$ систему можно решить методом Гаусса.

Если ранг матрицы $r(A) = m$, то все «*m*» уравнений являются линейно независимыми, а остальные уравнения являются их линейной комбинацией.

Виды решений:

1. Если $r = n$, то система будет иметь *единственное* решение.
2. Если $r < n$, то система имеет *множество* решений, которые определяются свободными переменными.
3. Если в процессе исключения неизвестных получилась строка $0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad b$, то система *решений не имеет* (Ø), так как $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots 0 \cdot x_n = b$ или говорят система *несовместна*.

§4. Геометрический смысл решения неравенств и систем неравенств.

Пусть дана система линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \end{cases}$$

Определение 1. Уравнение $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ определяет на плоскости OX_1X_2 прямую, которая разбивает эту плоскость на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой.

Сама прямая называется *граничной* и принадлежит обеим полуплоскостям.

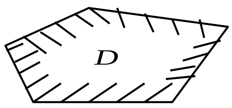
Определение 2. Координаты точек, лежащих в одной полуплоскости, удовлетворяют неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$, а координаты точек, лежащих в другой полуплоскости, удовлетворяют неравенству $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$.

Аналогично для второго неравенства.

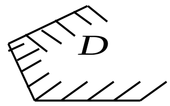
Определение 3. Система неравенств удовлетворяет множеству точек $(x_1; x_2)$, лежащих в пересечении полуплоскостей, заданных неравенствами системы.

Определение 4. Пересечение плоскостей есть некоторая многоугольная область D, которая называется *областью решений* системы неравенств.

Определение 5. Если область D ограничена, ее называют *многоугольником решения* системы

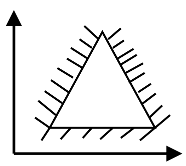


замкнутая
(ограниченная)



открытая
(неограниченная)

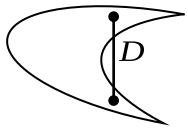
Определение 6. Если система неравенств противоречива, то область D - пустое множество.



$\varnothing$

Определение 7. Множество решений называется *выпуклым*, если оно вместе со своими двумя точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

выпуклое



невыпуклое

Пример 1. Построить множество решений неравенства:

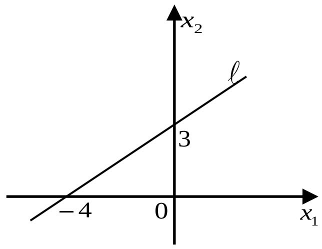
$$3x_1 - 4x_2 + 12 \le 0$$

$$-4x_2 \le -3x_1 - 12$$

$$x_2 \ge \frac{-3}{-4}x_1 - \frac{12}{-4} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{4}x_1 + 3$$

$$\ell_i \;\; x_2 = \frac{3}{4}x_1 + 3$$

x_1	0	-4
x_2	3	0



Выберем контрольную точку $0(0;0)$: $0 - 0 + 12 \le 0$ (ложь).

Поэтому решением неравенства является верхняя полуплоскость, не содержащая точку О.

Пример 2. Построить множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_2 \le 5x_1 + 20 \\ 3x_1 \le -2x_1 + 24 \\ -3x_2 \le -x_1 + 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \le \frac{5}{4}x_1 + 5 \\ x_2 \le -\frac{2}{3}x_1 + 8 \\ x_2 \ge \frac{1}{3}x_1 - 1 \\ x_2 \le 6 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$$\ell_1: \; x_2 = \frac{5}{4}x_1 + 5$$

x_1	0	-4
x_2	5	0

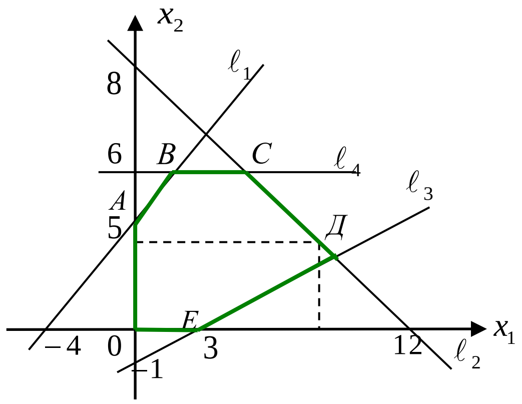
$$\ell_2: \; x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 8$$

x_1	0	6
x_2	8	4

$$\ell_3: \; x_2 = \frac{1}{3}x_1 - 1$$

x_1	0	3
x_2	-1	0

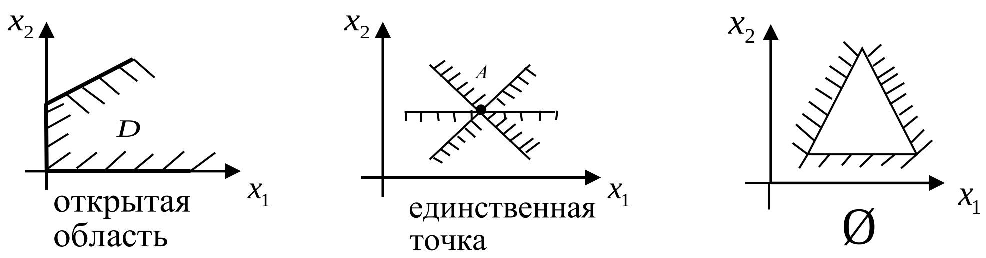
$$\ell_4: \; x_2 = 6$$



O(0; 0) $\begin{matrix} 0+0 \le 20 & (\text{верно}) \\ 0+0 \le 24 & (\text{верно}) \\ 0-0 \le 3 & (\text{верно}) \end{matrix}$

Точки О, А, В, С, Д, Е - вершины области решений или *угловые точки*.

Замечание: При построении области решений системы неравенств могут встречаться и другие случаи.



§5. Геометрический метод решения задач линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

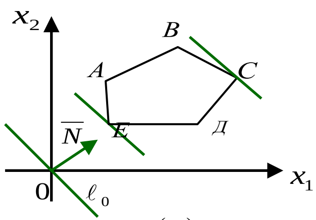
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \;\to\; \max\,(\min)$$

К такой форме может быть сведена каноническая задача с ограничениями в виде уравнений, когда число переменных *n* больше числа уравнений *m* на два, т.е. $\boxed{n-m=2}$.

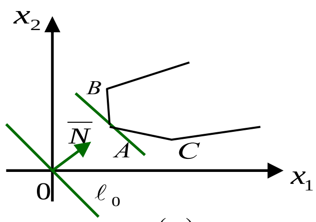
Определение 1. *Множество допустимых решений* задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многоугольник, а оптимальное решение задачи находится, по крайней мере, в одной из угловых точек этого многогранника решений.

Следовательно, задачу линейного программирования можно сформулировать так:

Среди всех точек области *D* найти ту, которая обращает в *max* или *min* целевую функцию *Z*.



$Z(E) - \min$
$Z(C) - \max$



$Z(A) - \min$
$\max - \varnothing$

1. Вектор $\overline{N}(c_1;c_2)$ - нормальный вектор, он указывает направление возрастания функции.
2. Приравниваем значение *Z* к какой- либо постоянной величине.

$$c_1x_1 + c_2x_2 = c \quad (c = 0)$$

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 \quad - \text{уравнение прямой } \ell_0$$

Придавая постоянной *C* различные числовые значения, будем получать прямые параллельные ℓ_0 и перпендикулярные нормальному вектору. Следовательно, уравнение $c_1x_1 + c_2x_2 = c$ определяет на плоскости семейство параллельных прямых.

Виды геометрического решения задач линейного программирования.

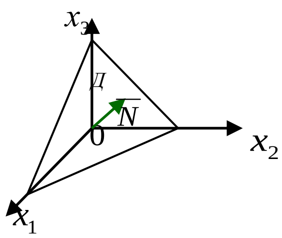
1. Решением задачи на *min* является первая угловая точка, в которой прямая ℓ_0 встречается с областью D при перемещении прямой в положительном направлении нормального вектора.
2. Решением задачи на *max* является последняя угловая точка, в которой прямая ℓ_0 встречается с областью D в положительном направлении нормального вектора $\overline{N}(c_1;c_2)$.

Во-втором случае задача на *max* решений не имеет, т.е. *Z* не ограничена сверху (аналогично может быть не ограничен *min)***.**

3. Если прямую ℓ_0 перемещать в направлении противоположном (отрицательном) к вектору, то первая вершина многоугольника - *max***,** а последняя - *min.*

Замечания:

1. Если прямая ℓ_0 при перемещении совпадает с отрезком области D, то все точки этого отрезка дают решение задачи. В этом случае решений бесчисленное множество.
2. Аналогично решается задача линейного программирования в случае 3-х переменных.



Пример: Задача об использовании ресурсов.

Для изготовления двух видов продукции p_1 и p_2 используют 4 вида ресурсов $S_1; S_2; S_3; S_4$. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затраченных на изготовление единицы продукции, даны в таблице:

Вид ресурса	Число единиц ресурсов, затраченных на изготовление единицы продукции		Запасы ресурса
	P1	P2	
S_1	1	3	18
S_2	2	1	16
S_3	-	1	5
S_4	3	-	21

Прибыль от реализации единицы продукции p_1 и p_2 соответственно 2 и 3 денежные единицы. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации была бы максимальной.

Решить задачу графически.

Решение. Составим модель задачи.

Пусть:

x_1 - количество продукции p_1.

x_2 - количество продукции p_2

$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \le -\frac{1}{3}x_1 + 6 \\ x_2 \le -2x_1 + 16 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

$$\ell_1 : x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + 6$$

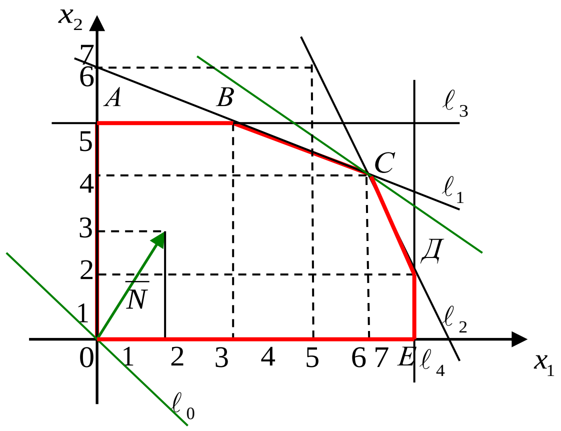
x_1	0	3
x_2	6	5

$$\ell_2 : x_2 = -2x_1 + 16$$

x_1	8	7
x_2	0	2

$$\ell_3 : x_2 = 5$$

$$\ell_4 : x_1 = 7$$



$O(0;0) \quad Z = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0$
$A(0;5) \quad Z = 2\cdot 0 + 3\cdot 5 = 15$
$B(3;5) \quad Z = 2\cdot 3 + 3\cdot 5 = 21$
$C(6;4) \quad Z = 2\cdot 6 + 3\cdot 4 = 24$
$D(7;2) \quad Z = 2\cdot 7 + 3\cdot 2 = 20$
$E(7;0) \quad Z = 2\cdot 7 + 3\cdot 0 = 14$

$\overline{N}(2;3)$
$\ell_0 : 2x_1 + 3x_2 = 0$
$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1$$

x_1	0	3
x_2	0	-2

Вывод: для того, чтобы получить максимальную прибыль *(Z=24)*, необходимо произвести 6 единиц продукции *P_1* и 4 единицы продукции *P_2.*

Контрольные вопросы для самоконтроля

1. Какое множество называется выпуклым?
2. Какая точка выпуклого множества называется угловой?
3. Что называется многогранником решений?
4. Какие задачи ЛП можно решить графическим методом?